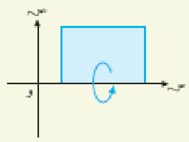
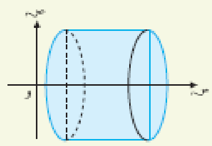
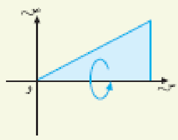
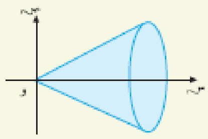
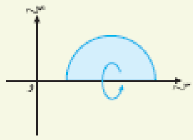
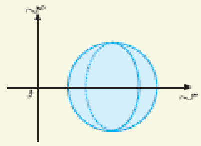
● إيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

أ	ب
	
	
	

الأسطوانة : جسم دوراني ينتج من دوران منطقة مستوية على شكل مستطيل دورة كاملة حول أحد أضلاعه أو مستقيم يوازيهما .

المخروط القائم: جسم دوراني ينتج من دوران منطقة مستوية على شكل مثلث قائم دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة .

الكرة : جسم دوراني ينتج عن دوران منطقة مستوية على شكل نصف دائرة دورة كاملة حول القطر .

ملاحظة:-

إذا دارت منطقة مستوية حول مستقيم في مستواها، فإن الجسم الناتج من الدوران يُسمى (جسم دوراني) ، ويُسمى المستقيم (محور الدوران).

أجب عما يلي :

١) إذا دار سلك على شكل قطعة مستقيمة طولها ١٠سم حول محور يوازيه فما اسم الشكل الناتج؟

٢) وإذا كان بعد السلك عن المحور يساوي ٤ وحدات فما حجم الجسم الناتج علمًا بأن نصف قطر المحور ٣سم ؟

٣) إذا كان نصف قطر السلك ٢سم فما حجم المادة التي يمكن أن تصنع منها الأسطوانة الناتجة ؟

الحل :

١) الشكل أسطوانة مفرغة في مركزها العمود (المحور) .

٢) حجم المجسم = π نق^{٢} ع = ٧ × ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٠ = ١٥٤٠سم^{٣} .

حجم المحور = ٣ × ٣ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٠ ≈ ٢٨٣ ، الحجم المطلوب = ١٥٤٠ − ٢٨٣ = ١٢٥٧سم^{٣}

٣) يمكن أن ينظر إلى سطح الأسطوانة على أنها مستطيل طوله = محيط الأسطوانة ، وعرضه يساوي طول الأسطوانة.

المحيط = ٢ × ١١ × $\frac{٢٢}{٧}$ ≈ ٦٩ سم

المساحة = ٦٩ ×١٠ = ٦٩٠ سم^{٢}

حجم المادة = ٦٩٠ × ٧ = ٤٨٣٠سم^{٣} .

∴ حجم الجسم الدوراني = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi\, \text{ص}^{2} \,.\, \text{ءس}$

إذا كان ق(س) = س ، هـ(س) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، ل(س) = ٣ ودارت المنطقة المحصورة بين المنحنيات الثلاثة دورة كاملة حول محور السينات فأوجد حجم الجسم الناتج.

الحل :

تقاطع ق مع هـ:

$\text{س} = \frac{1}{\text{س}} \Longleftarrow \text{س}^{2} = 1$

$\Longleftarrow \text{س} = \pm 1$

تقاطع ق مع ل $\Longleftarrow$ س = ٣

تقاطع هـ مع ل $\Longleftarrow \frac{1}{\text{س}} = 3 \Longleftarrow \text{س} = \frac{1}{3}$

$$\text{ح}_{1} = \pi \int_{\frac{1}{3}}^{1} (\text{ل}^{2} - \text{هـ}^{2}) \,.\, \text{ءس} = \pi \int_{\frac{1}{3}}^{1} (9 - \frac{1}{\text{س}^{2}}) \,.\, \text{ءس}$$

$$= \pi \left(9\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right) \Big]_{\frac{1}{3}}^{1} = 4\pi$$

$$\text{ح}_{2} = \pi \int_{1}^{3} (\text{ل}^{2} - \text{ق}^{2}) \,.\, \text{ءس}$$

$$= \pi \int_{1}^{3} (9 - \text{س}^{2}) \,.\, \text{ءس} = \pi \left(9\text{س} - \frac{\text{س}^{3}}{3}\right) \Big]_{1}^{3} = \frac{28}{3}\pi$$

$$\text{ح} = 4\pi + \frac{28\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$$

يكتفى فقط بدراسة حجوم الأجسام الدورانية الناتجة من دوران مساحة معلومة حول محور السينات ولا داعي للتعرض لحالة الدوران حول المحور الصادي.

أ) ما حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = ٤س ـ س^{٢} ومحور السينات حول المحور السيني ؟

ب) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة : ص = ٤ - ٢س والمحور السيني والمستقيمين س = ٠ ، س =١ حول المحور السيني .

أ) نوجد حدود التكامل:

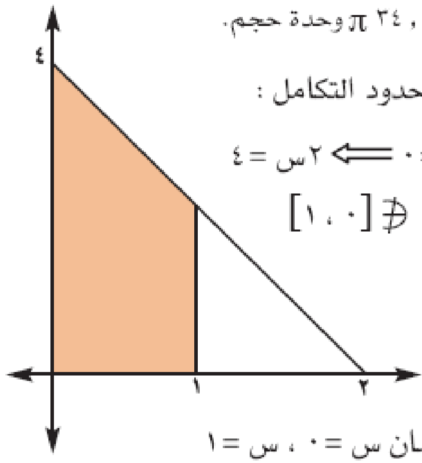
٤س-س^{٢} = ٠ ⟸ س = ٠ أو س = ٤

$ح = \pi \int_{٠}^{٤} (٤س-س^{٢})^{٢}\, ءس$

$= \pi \left| \int (١٦س^{٢} - ٨س^{٣} + س^{٤})\,.\,ءس \right|$

$= \left| \pi \left(\frac{١٦}{٣}س^{٣} - \frac{٨}{٤}س^{٤} + \frac{س^{٥}}{٥}\right)\Big]_{٠}^{٤} \right|$

= ٣٤,١٣٣٣ π وحدة حجم.



ب) نوجد حدود التكامل :

٤ - ٢س = ٠ ⟸ ٢س = ٤

∴ س = ٢ ∉ [٠ ، ١]

∴ المستقيمان س = ٠ ، س = ١

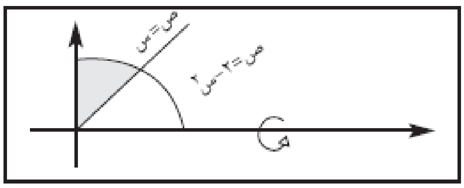
$ح = \pi \int_{٠}^{١} (٤-٢س)^{٢}\, ءس$

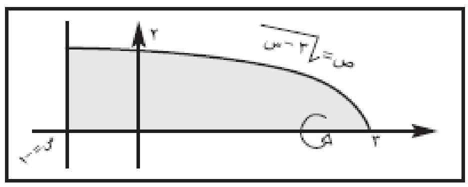
$= \pi \left(١٦س - ٨س^{٢} + \frac{٤}{٣}س^{٣}\right)\Big|_{٠}^{١}$

$= \pi \left[\left(١٦ - ٨ + \frac{٤}{٣}\right) - (٠)\right]$

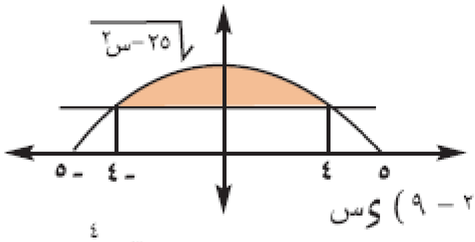
$= \frac{٢٨\pi}{٣}$ وحدة حجم

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور السيني لكل من الأشكال التالية :





أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بنصف الدائرة ص=$\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ والمستقيم ص=٣ حول المحور السيني.



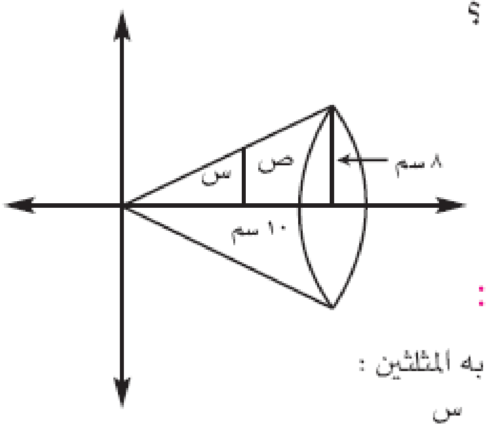
الحل :

$ح = \pi \int_{-٤}^{٤} (٢٥ - س^{٢} - ٩)\, ءس$

$= \pi \int_{-٤}^{٤} (١٦ - س^{٢})\, ءس = \pi \left(١٦س - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\Big|_{-٤}^{٤}$

$= \frac{٢٥٦}{٣}\pi$

مثلث قائم الزاوية طول ضلعي القائمة ٨سم، ١٠سم. أدير هذا المثلث دورة كاملة حول الضلع الأكبر (١٠ سم) ما حجم الجسم الناتج عن الدوران؟



الحل :

من تشابه المثلثين :

$\frac{ص}{٨} = \frac{س}{١٠}$

$\Leftarrow ص = \frac{٤}{٥}س$

$ح = \pi \int_{٠}^{١٠} \frac{١٦}{٢٥}س^{٢}\,.\,ءس = \pi \times \frac{١٦}{٢٥} \times \frac{س^{٣}}{٣}\Big]_{٠}^{١٠}$

≃ ٢١٣ π وحدة حجم.

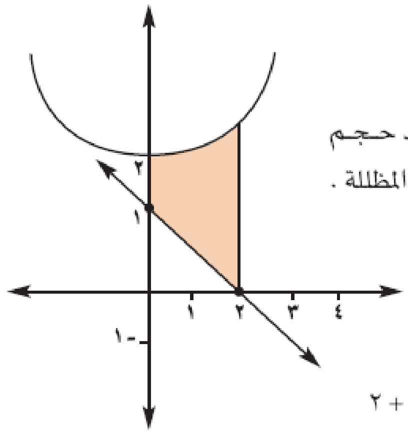
ثانياً : حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنيين حول المحور السيني.

حجم الجسم الناتج من الدوران = $\pi \int_{أ}^{ب} (ص_{١}^{٢} - ص_{٢}^{٢})\,.\,ءس$

حيث $ص_{١} \geqslant ص_{٢}$ لكل س ∈ [أ ، ب]

تؤخذ القيمة المطلقة في حالة عدم معرفة أيهما أكبر $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$.

من خلال الشكل المجاور أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة .



الحل :

من النقطتين (٢ ، ٠) ، (٠ ، ١)

∴ $\text{ص} = -\frac{١}{٢}\text{س} + ١$ ، $\text{ص} = \text{س}^٢ + ٢$

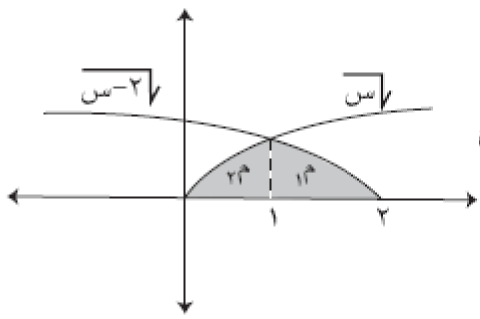
∴ $\text{ح} = \pi \int_{٠}^{٢} [(\text{س}^٢ + ٢)^٢ - (-\frac{١}{٢}\text{س} + ١)^٢] . \text{ءس}$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (\text{س}^٤ + \frac{١٥}{٤}\text{س}^٢ + \text{س} + ٣)\text{ءس} = \pi (\frac{\text{س}^٥}{٥} + \frac{١٥}{١٢}\text{س}^٣ + \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٣\text{س}) \Big|_{٠}^{٢}$

$= \frac{١٢٢}{٥}\pi$ وحدة الحجم .

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، هـ (س) = $\sqrt{٢ - \text{س}}$. ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات.

الحل :



نجد نقط التقاطع

$\sqrt{\text{س}} = \sqrt{٢ - \text{س}}$

س = ٢ − س

٢س = ٢

س = ١ نقطة تقاطع ق(س) مع هـ(س)

$\sqrt{\text{س}} = ٠$ ⟵ س = ٠ التقاطع مع السينات

$\sqrt{٢ - \text{س}} = ٠$ ⟵ س = ٢

∴ منطقتان للدوران م١ ، م٢

$\text{ح}_١ = \pi \int_{١}^{٢} (\sqrt{٢ - \text{س}})^٢ \text{ءس} = \pi (٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}) \Big|_{١}^{٢} = \frac{١}{٢}\pi$

$\text{ح}_٢ = \pi \int_{٠}^{١} (\sqrt{\text{س}})^٢ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\pi$

∴ $\text{ح} = \text{ح}_١ + \text{ح}_٢ = \pi$ وحدة الحجم.

تدريب

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

$\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^٢ + ٢$ ، ٥ س − ٨ ص + ١٤ = ٠ حول المحور السيني

الحل

نوجد حدود التكامل: $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^٢ + ٢$

$\text{ص} = \frac{١}{٨}(٥\text{س} + ١٤)$

$\frac{١}{٤}\text{س}^٢ + ٢ = \frac{١}{٨}(٥\text{س} + ١٤)$

$\Leftarrow ٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢ = ٠$

$\Leftarrow (٢\text{س} - ١)(\text{س} - ٢) = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٢ ، \text{س} = \frac{١}{٢}$

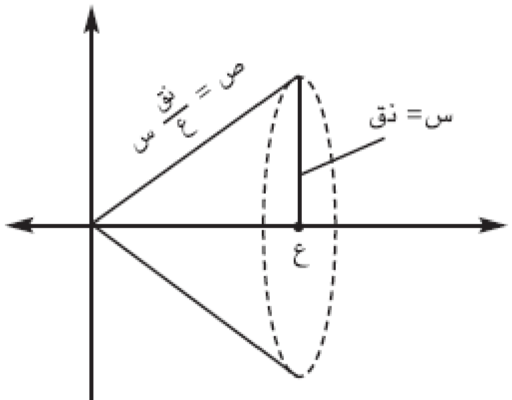
$\text{ح} = \pi \int_{\frac{١}{٢}}^{٢} \left((\frac{١}{٨}(٥\text{س} + ١٤))^٢ - (\frac{\text{س}^٢}{٤} + ٢)^٢ \right) . \text{ءس}$

$\cong ٠,٢١٤\,\pi$ وحدة حجم.

تدريب

استخدم التكامل المحدد لاشتقاق الصيغة التي تعطي حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه (ع) ، وطول نصف قطر قاعدته (نق) .

الحل



المستقيم : $\text{ص} = \frac{\text{نق}}{\text{ع}}\text{س}$

المستقيم : س = ٠ ، س = ع

∴ حجم المخروط = $\text{ح} = \pi \int_{٠}^{\text{ع}} \text{ص}^٢ . \text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\text{ع}} \pi \frac{\text{نق}^٢}{\text{ع}^٢} \text{س}^٢ . \text{ءس}$

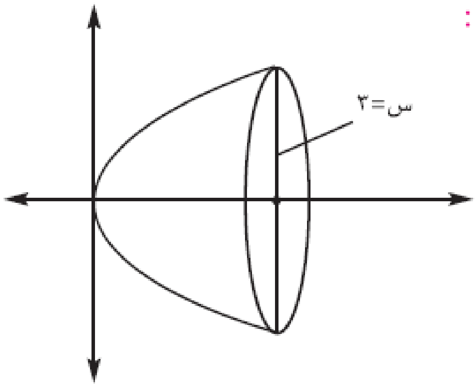
$= \pi \frac{\text{نق}^٢}{\text{ع}^٢} \int_{٠}^{\text{ع}} \text{س}^٢ \,\text{ء س}$

$= \pi \frac{\text{نق}^٢}{\text{ع}^٢} \times \frac{\text{س}^٣}{٣} \Big|_{٠}^{\text{ع}} = \frac{١}{٣}\pi \,\text{نق}^٢ \text{ع}$

تدريب

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة الواقعة في الربع الأول حول المحور س علمًا بأن المنطقة محددة بالقطع المكافئ $\text{ص}^{2} = 12\,\text{س}$ والوتر البؤري العمودي س = ٣ .

الحل :



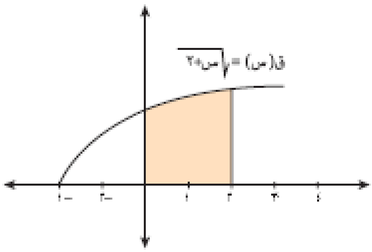
$$\text{ح} = \pi \int_{0}^{3} \text{ص}^{2} \cdot \text{ءس}$$

$$= \pi \int_{0}^{3} (12\,\text{س})\, \text{ءس} = \pi\, 6\,\text{س}^{2} \Big|_{0}^{3}$$

$$= [\pi\, 6 (9 - 0)] = 54\,\pi \ \text{وحدة الحجم} .$$

حل تمارين ومسائل ٥

١)

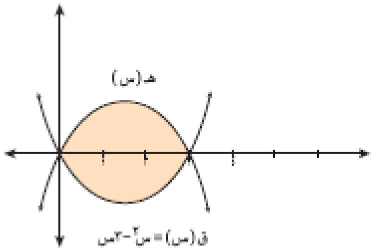


$$\text{م} = \int_{0}^{2} (\text{س}+2)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ءس} = \frac{2}{3} \left[(\text{س}+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \ \text{وحدة مربعة.}$$

٢) $\text{م} = \left| \int_{1}^{2} (\text{س}^{2} - 3\,\text{س}) \cdot \text{ءس} \right| = \frac{13}{6}$ وحدة مربعة

٣)

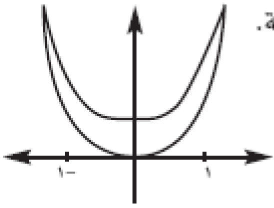


$$\text{م} = \left| \int_{0}^{2} (2\,\text{س} - \text{س}^{2}) - (\text{س}^{2} - 2\,\text{س}) \cdot \text{ءس} \right|$$

$$= \int_{0}^{2} (4\,\text{س} - 2\,\text{س}^{2})\, \text{ءس} = \frac{8}{3} \ \text{وحدة مساحة}$$

٤) $\text{م} = \left| \int_{-2}^{2} \left((5 - (\text{س}^{2}+1)\right) \cdot \text{ءس} \right| = \left| 4\,\text{س} - \frac{\text{س}^{3}}{3} \Big|_{-2}^{2} \right|$

$= \frac{32}{3}$ وحدة مساحة.



٥) $\text{س}^{4} + 1 = 2\,\text{س}^{2}$

$\text{س}^{4} - 2\,\text{س}^{2} + 1 = 0$

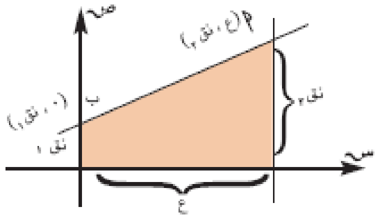
$\therefore (\text{س}^{2} - 1)^{2} = 0 \Longleftarrow \text{س} = \pm 1$

$\because$ ق(س) > هـ(س)

$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{1} [(\text{س}^{4}+1) - (2\,\text{س}^{2})] \cdot \text{ءس} = \frac{16}{15}$ وحدة مساحة

٧) ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1}}{\text{ع}}$

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع جزءًا طوله نق_{1} من الجزء الموجب لمحور الصادات.



معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هي ص = م س + جـ

أي أن: $\text{ص} = \frac{\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1}}{\text{ع}}\,\text{س} + \text{نق}_{1}$

المخروط الدائري القائم ينتج من دوران المنطقة المحددة بالآتي: $\text{ص} = \frac{\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1}}{\text{ع}}\,\text{س} + \text{نق}_{1}$

محور السينات ، س= ٠، س=ع

$\therefore$ حجم المخروط الدائري الناقص $= \pi \int_{0}^{\text{ع}} \text{ص}^{2} \cdot \text{ءس}$

$$= \pi \int_{0}^{\text{ع}} \left(\frac{\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1}}{\text{ع}}\,\text{س} + \text{نق}_{1} \right)^{2} \text{ءس}$$

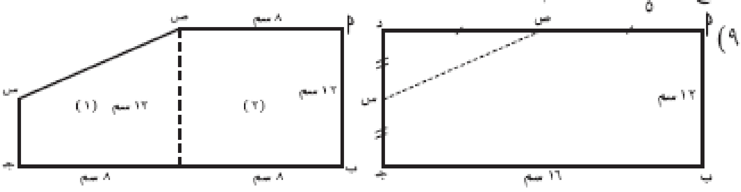
$$= \pi \int_{0}^{\text{ع}} \left[\frac{(\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1})^{2}}{\text{ع}^{2}}\,\text{س}^{2} + \frac{2\,\text{نق}_{1}(\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1})}{\text{ع}}\,\text{س} + \text{نق}_{1}^{2} \right] \cdot \text{ءس}$$

$$= \pi \left[\frac{(\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1})^{2}}{\text{ع}^{2}}\,\frac{1}{3}\,\text{س}^{3} + \frac{2\,\text{نق}_{1}(\text{نق}_{2} - \text{نق}_{1})}{\text{ع}}\,\frac{1}{2}\,\text{س}^{2} + \text{نق}_{1}^{2}\,\text{س} \right]_{0}^{\text{ع}}$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,\text{ع} \left(\text{نق}_{2}^{2} + \text{نق}_{1}\,\text{نق}_{2} + \text{نق}_{1}^{2}\right).$$

٨) $\text{ح} = \frac{\pi}{5}$ وحدة حجم

٩)



حجم الجسم الناشئ من دوران أب جـ س ص حول $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = حجم (١) + حجم (٢)

= حجم المخروط الدائري القائم الناقص + حجم الأسطوانة

$$= \frac{1}{3}\pi\text{ع} \left(\text{نق}_{1}^{2} + \text{نق}_{2}^{2} + \text{نق}_{1}\text{نق}_{2}\right) + \pi\,\text{نق}^{2}\,\text{ع}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 8 \times \left(6^{2} + (12)^{2} + 6 \times 12\right) + \pi \times (12)^{2} \times 8$$

$= 1824\,\pi$ وحدة حجم.